

Ficha 1 de exercícios, aula de 9/10/2007

1. Considere a seguinte equação não linear

$$e^{x/4} = \frac{2}{x}, \quad (x > 0) \quad (1)$$

e os métodos iterativos

$$x_{n+1} = 2e^{-x_n/4}, \quad x_{n+1} = 4 \ln(2/x_n)$$

- (a) Prove que a equação (1) admite uma solução única, z , no intervalo $[1.3, 1.5]$.
- (b) Prove que: um dos métodos acima converge para a raiz z , qualquer que seja x_0 escolhido em $[1.3, 1.5]$; o outro método diverge.
- (c) Utilizando o método convergente, faça $x_0 = 1.3$ e calcule as 2 primeiras iteradas x_1, x_2 . Quantas iteradas teria de calcular para obter um erro inferior a 10^{-3} ?
- (d) Relativamente ao método da alínea anterior, diga, justificando, quais os valores dos limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^2}$$

2. Mostre que o método de Newton aplicado a (1), começando com $x_0 = 1.3$, converge para a raiz z considerada.

3. Considere a função

$$f(x) = 1 - x^2 - 0.5 e^{-x}, \quad (2)$$

e mostre que tem um único zero $w \in [0, 1]$. Com o fim de aproximar w , considere a sucessão

$$x_{m+1} = x_m + Af(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots (A \neq 0) \quad (3)$$

- (a)
 - i. Mostre que, se $A = 1$ a sucessão converge para w , qualquer que seja x_0 escolhido no intervalo $I = [0.7, 1]$.
 - ii. Determine a ordem de convergência da sucessão.
 - iii. Tomando $x_0 = 1$, calcule x_1, x_2 . Usando estes valores, obtenha um majorante para o erro $|w - x_2|$.
 - (b) No caso de $A = 2$, calcularam-se alguns elementos da sucessão:
 $0.5, 1.39347, -0.738257, -1.92059, -14.12289, -1.36027 \times 10^6,$
 $-1.79602 \times 10^{590756} \dots$ Diga o que esses valores sugerem quanto à convergência (ou não) da sucessão para w e dê uma justificação teórica.
4. (a) Mostre que o método de Newton aplicado à equação (2) converge para a raiz w considerada, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [0.7, 1]$.
- (b) Tomando $x_0 = 1$, calcule x_1, x_2 . Usando estes valores, obtenha um majorante para o erro $|w - x_2|$.