1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

Álgebra Linear - 2º Semestre - 2004/2005

LEE, LEGI, LEIC-TP, LERCI

Problema 1. Calcule $2A - 3B$, onde

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2-2i & 0 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1+2i \\ i & 3-i \end{pmatrix}$

Problema 2. Calcule, se possível, os produtos AB e BA, quando:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} \end{bmatrix}$

Problema 3. Obtenha uma formula para A^n, onde A é a seguinte matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

4. Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. No caso de ser verdadeira, diga porquê. No caso de ser falsa, indique um contra-exemplo.

a) Se $AB = 0$, então tem-se necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$.

b) $(AB)^2 = A^2B^2$.

c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

d) $(A+B)^2 = (A+B)(B+A)$.

e) Se a primeira e a terceira colunas de B são iguais, o mesmo acontece com a primeira e a terceira colunas de AB.

f) Se a primeira e a terceira linhas de B são iguais, o mesmo acontece com a primeira e a terceira linhas de AB.

Problema 5. Suponha que A comuta com qualquer matriz 2×2; em particular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ comuta com } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e com } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostre que $a = d$ e que $b = c = 0$, pelo que A é um múltiplo da matriz identidade. Estas matrizes, conhecidas como *matrizes escalares*, são as únicas que comutam com todas as outras.

Problema 6. Seja M_5 uma matriz quadrada escalar (veja definição no pro-blema anterior), $m \times m$, com elementos diagonais iguais a 5. Mostre que

1. para toda a matriz $A_{m \times n}$, $M_5 A = 5A$;
2. para toda a matriz $B_{n \times m}$, $BM_5 = 5B$.

Problema 7. Mostre que se A for uma matriz $n \times n$ tal que $A^T A = O$, então $A = O$, onde O designa a matriz nula $n \times n$. Sugestão: pense nos elementos diagonais de $A^T A$.

Problema 8. Uma matriz A diz-se simétrica se $A = A^T$, e diz-se anti-simétrica se $A = -A^T$.

a) Verifique que se A é simétrica ou anti-simétrica, então A é quadrada.

b) Mostre que a matriz AA^T é simétrica, qualquer que seja a matriz A.

c) Se A e B são simétricas, então AB também o é? E AB^T?

d) Existirão ao mesmo tempo matrizes simétricas e anti-simétricas? Se sim, diga quais.

e) Mostre que numa matriz anti-simétrica, os elementos da diagonal principal são todos nulos.

Problema 9. Quais das seguintes matrizes 3×3 são matrizes em escada por linhas? Indique as respectivas características.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{h)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{j)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{k)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{l)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 10. Determine a característica de cada uma das seguintes matrizes:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} -1 & 1+2i \\ -3+i & 5+5i \end{pmatrix}$$

Problema 11. Considere as seguintes matrizes aumentadas, em escada de linhas, e com pivots iguais a um. Resolva cada um dos correspondentes sistemas de equações lineares.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 12. Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases} \qquad \text{d)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \end{cases} \qquad \text{f)} \begin{cases} z_1 - z_2 = 1-2i \\ (1+i)z_2 = 2 \end{cases}$$

Problema 13. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas variáveis x, y, z em função dos respectivos parâmetros.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - y = -3 \\ az = 0 \\ x - 5y - 5z = b \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} \alpha x + \beta z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ \alpha y + 2z = \beta \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} -2z = 0 \\ cy + 4z = d \\ 4x + 5y - 2z = -2 \end{cases} \qquad \text{d)} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = 2 \\ (a^2-4)z = a-2 \end{cases}$$

Problema 14. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Encontre uma expressão para A na forma $A = E_1 ... E_k R$, onde as matrizes $E_j, j = 1, ..., k$ são matrizes elementares e R uma matriz em escada de linhas.

Problema 15. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encontre matrizes elementares tais que $E_k ... E_1 A = I$.

b) Escreva A^{-1} como um produto de k matrizes elementares.

c) Escreva A como um produto de k matrizes.

16. Considere uma matriz $n \times n$, B, e seja B^{-1} a sua inversa que se admite existir. Descreva, em termos de B^{-1}, as inversas das seguintes matrizes C, caso existam:

a) $C = 2B$.

b) C é obtida de B trocando as duas primeiras linhas de B.

c) C é obtida de B multiplicando a primeira linha de B por 2.

d) C é obtida de B substituindo a primeira linha de B pela sua soma com a segunda linha.

Problema 17. Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

não é invertível para quaisquer entradas a, b, c, d, e, f, g, h reais.

18. Sejam A, B, e C matrizes quadradas da mesma ordem.
Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, diga porquê, e se for falsa, dê um contra-exemplo.

a) Se A e B são invertíveis, então $A + B$ também é.

b) Se A, B, e $A + B$ são invertíveis, então $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

c) Se $AB = AC$, e A tem inversa, então $B = C$.

d) Se A tem inversa, então A^2 também tem.

e) Se A e B são invertíveis, então AB também é, e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

f) Se A é invertível, então A^T também é, e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

g) Se A é simétrica e invertível, então A^{-1} também o é.

h) Se A tem os elementos da diagonal principal todos iguais a 1, então A é invertível.

i) Não existe nenhuma matriz A, 2×2, diferente da identidade, que seja auto-inversa, isto é, tal que $A = A^{-1}$.

Problema 19. Utilizando o Método de Gauss-Jordan, calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 20. Calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

a) $\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$

em que k_1, k_2, k_3, k_4, k são reais.

21. Mostre que se A é uma matriz quadrada tal que $(I-A)^{-1}$ existe, então teremos sempre a igualdade comutativa

$$A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A.$$

Sugestão: repare que A e $I - A$ comutam.