**2ª LISTA DE EXERCÍCIOS**

**Determinantes**

**Álgebra Linear - 2º Semestre - 2004/2005**

LEE, LEGI, LEIC-TP, LERCI

**Problema 1.** Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Considere, por hipótese, $\det A = -7$. Calcule

a) $\det(3A)$ b) $\det(2A^{-1})$ c) $\det((2A)^{-1})$ d) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

**Problema 2.** Uma matriz quadrada $M$ é dita idempotente se $M^2 = M$. O que é que pode dizer sobre os determinantes das matrizes idempotentes?

**Problema 3.** Será que existem matrizes $A$ e $B$, ambas $2 \times 2$, tais que

$$A^{-1}B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

**Problema 4.** Para que valor(es) de $k$ a matriz $A$ deixa de ser invertível?

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

**Problema 5.** Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os valores de $a$ e $b$, se existirem, para os quais existem $A^{-1}$ e $B^{-1}$.

b) Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$ reduzindo, se possível, as matrizes à forma triangular. Comente.

**Problema 6.** Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem a condição

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Problema 7.** Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Problema 8.** Escreva

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

**Problema 9.** Mostre as igualdades seguintes, sem calcular os determinantes.

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

**Problema 10.** Designe por $U_n$ uma matriz quadrada $n \times n$, com zeros na diagonal principal e 1 em todas as outras posições.

a) Calcule $\det(U_2)$.

b) Verifique que

$$\det(U_3) = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Mostre que, para $n \geq 3$,

$$\det(U_n) = -\frac{n-1}{n-2}\det(U_{n-1}),$$

e consequentemente, $\det(U_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

**Problema 11.** Seja $D_n$ o determinante da matriz $E_n$, onde $E_n$ é uma matriz $n \times n$ com 1's na diagonal principal e nas "bandas"acima e abaixo da diagonal principal, e 0's em todas as outras posições. Assim,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Comece por verificar que $D_3 = D_2 - D_1, D_4 = D_3 - D_2$, e $D_5 = D_4 - D_3$.

b) Mostre agora que para todo o $n \geq 3$, cada determinante é a diferença dos dois anteriores, isto é, $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$.

c) Começando por $D_1 = 1$ e $D_2 = 0$, calcule os valores de $D_3$ até $D_{10}$. Observe o padrão dos valores que calculou e tente adivinhar quanto vale $D_{100}$.

**Problema 12.** Considere uma matriz $n \times n$, $A_n$, definida como se segue, e designe por $a_n$ o seu determinante.

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Comece por escrever as matrizes $A_1$, $A_2$, e $A_3$. Calcule os respectivos determinantes $a_1$, $a_2$, e $a_3$, e verifique que se tem a igualdade $a_3 = 2a_2 - a_1$.

b) Agora mostre que se tem sempre a igualdade $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Sugestão: use um desenvolvimento de Laplace apropriado.