4ª LISTA DE EXERCÍCIOS
Produto Interno
Álgebra Linear - 2º Semestre - 2004/2005
LEE, LEGI, LEIC-TP, LERCI

Problema 1. Seja $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ um produto interno num espaço linear V. Mostre que

i) para qualquer vector $\mathbf{v} \in V$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$;

ii) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, para qualquer $\mathbf{w} \in V$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Problema 2. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Mostre que temos um produto interno em $\mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:

a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$

b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

Problema 3. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em $\mathbb{R}^3$. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.

a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$

d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

Problema 4. No espaço linear real de todos os polinómios reais, determine se

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$$

é um produto interno, e, em caso negativo, indique quais dos axiomas da definição de produto interno são violados.

Problema 5. Seja V o espaço linear real de polinómios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a um. Mostre que a função

$$\langle a + bx, c + dx \rangle \; = \; ac + \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{bd}{3}$$

define um produto interno em V.

Problema 6. Seja V o espaço linear real das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Mostre que

$$\langle A, B \rangle \;=\; \mathrm{tr}(AB^T)$$

define um produto interno em V, onde $\mathrm{tr}(M)$, o **traço** de M, é a soma dos elementos da diagonal principal de M.

Problema 7. Utilize os produtos internos usuais para calcular:

a) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3, 2)$

b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$ e $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$

Problema 8. Utilize os produtos internos do exercício 2 para calcular:

a) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3)$

b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (-1, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 5)$

Problema 9. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\|k\mathbf{v}\| = 5$, com $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$?

Problema 10. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais?

a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$

b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$

Problema 11. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Encontre dois vectores, com norma igual a um, que sejam ortogonais aos três vectores seguintes:
$\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$.

Problema 12. Calcule o ângulo que o vector $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ faz com os vectores coordenados unitários de $\mathbb{R}^2$ (use o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$).

Problema 13. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ numa base ortonormal, quando

a) $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1)\,, \mathbf{u_2} = (-1, 1, 0)\,, \mathbf{u_3} = (1, 2, 1)$

b) $\mathbf{u_1} = (1, 0, 0)\,, \mathbf{u_2} = (3, 7, -2)\,, \mathbf{u_3} = (0, 4, 1)$

Problema 14. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3,$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ numa base ortonormal.

Problema 15. Sejam $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Mostre que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é um conjunto ortonormal quando em $\mathbb{R}^2$ está definido o produto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3x_1x_2 + 2y_1y_2,$$

mas não é um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual.

Problema 16. Prove que as colunas de uma matriz A, $m \times n$, são ortoganais se e só se A^tA é uma matriz diagonal, e são ortonormais se e só se A^tA é a matriz identidade. Uma matriz com esta última propriedade chama-se **matriz ortogonal**.

Problema 17. No espaço linear real V das matrizes 2×2 com entradas reais, considere o produto interno

$$\langle A, B \rangle \;=\; \mathrm{tr}(A^T B).$$

Determine uma base para o complemento ortogonal em V

a) do subespaço das matrizes diagonais;

b) do subespaço das matrizes simétricas;

c) do subespaço formado pelas matrizes de traço nulo.

Problema 18. Considere a seguinte função em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\langle\, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \,\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que esta função é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

b) Ortogonalize os vectores $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (0,1,0)$ e $\mathbf{v_3} = (0,0,1)$.

c) Determine a projecção ortogonal de $(1,1,1)$ sobre o subespaço $\mathrm{L}(\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\})$.

Problema 19. Seja V o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere em V o produto interno dado por

$$\langle a + bx + cx^2, d + ex + fx^2 \rangle = ad + be + cf.$$

a) Determine uma base ortonormal para o subespaço L de V gerado por $4x + 3x^2$ e por $12 + x + 7x^2$.

b) Determine a projecção ortogonal de $p(x) = x^2$ sobre L.

Problema 20. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, e seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u_1} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{u_2} = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$. Exprima $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, em que $\mathbf{w_1} \in W$ e $\mathbf{w_2} \in W^\perp$.

Problema 21. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Encontre bases para o espaço gerado pelas linhas da matriz A e para o núcleo de A.

b) Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas linhas de A é ortogonal a qualquer vector do núcleo de A. (Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual.)

Problema 22. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^\perp$ e a distância do vector $(1, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$ respectivamente, quando

a) consideramos $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual;

b) consideramos $\mathbb{R}^2$ com o seguinte produto interno:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$$

.

Problema 23. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

a) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - 2y - 3z = 0$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?

b) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pelas equações paramétricas $x = 2t$, $y = -5t$ e $z = 4t$, sendo $t \in \mathbb{R}$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?

Nos problemas que se seguem, considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

Problema 24. Encontre equações paramétrica e cartesiana para a recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1, 2, 1)$ e é paralela ao vector $(-1, 0, 3)$.

Problema 25. Considere a recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(0, 1, 0)$ e é paralela ao vector $(1, 2, 3)$. Qual é a distância desta recta à origem e ao ponto $(0, 2, 1)$?

Problema 26. Determine uma equação cartesiana para o plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1, 0, -1)$, e é paralelo ao plano que passa pela origem e é gerado pelos vectores $(0, 1, 1)$ e $(0, 1, 2)$.

Problema 27. Considere o plano em $\mathbb{R}^3$ com equação cartesiana $x-2y+z=-3$. Encontre uma equação paramétrica deste plano, isto é, encontre vectores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{R}^\mathbf{3}$ e encontre um ponto $P \in \mathbb{R}^3$, tais que, (x,y,z) é um ponto do plano se e só se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com

$$(x,y,z) = \alpha\mathbf{v_1} + \beta\mathbf{v_2} + P.$$

Problema 28. Qual é a distância do plano $x-2y+2z=1$ à origem, e qual é o ponto do plano mais próximo da origem?

Problema 29. Considere um plano em $\mathbb{R}^3$, que passa pelo ponto $\mathbf{p}$ e é ortogonal ao vector $\mathbf{n}$. Mostre que a distância deste plano à origem é dada por

$$\frac{|\mathbf{p}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Problema 30. Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $(1,2,3)$ e é paralelo ao plano de equação $x+2y-z=1$. Calcule a distância entre os dois planos.

Problema 31. Determine a distância de $(2,0,1)$ ao plano $x-y-z=3$.

Problema 32. Prove que a distância do ponto $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ ao plano de equação cartesiana $ax+by+cz=d$ é

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Problema 33. Considere três planos em $\mathbb{R}^3$, cujos vectores normais são linearmente independentes. Mostre que os três planos se intersectam num ponto.