5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Transformações Lineares

Álgebra Linear - 2º Semestre - 2004/2005

LEE, LEGI, LEIC-TP, LERCI

Problema 1. Diga, justificando, quais das seguintes funções são transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$

Problema 2. Considere os vectores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ do espaço linear W, e seja $T : W \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v_1}) = (1, -1, 2),\ T(\mathbf{v_2}) = (0, 3, 2)\ \text{ e }\ T(\mathbf{v_3}) = (-3, 1, 2).$$

Encontre $T(2\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2} + 4\mathbf{v_3})$.

Problema 3.

a) Considere $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ base de $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 0)$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{v_1}) = (1, -2)$ e $T(\mathbf{v_2}) = (-4, 1)$. Encontre a fórmula para $T(x_1, x_2)$ e use-a para calcular $T(5, -3)$.

b) Considere $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ base de $\mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1,)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{v_1}) = (1, 0)$, $T(\mathbf{v_2}) = (-1, 1)$ e $T(\mathbf{v_3}) = (0, 1)$. Determine a fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use-a para calcular $T(7, 13, 7)$.

Problema 4. Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares abaixo, em relação à base canónica no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_3)$

d) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$

e) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

Problema 5. Use a transformação linear de multiplicação por uma matriz para calcular os seguintes transformados:

a) A reflexão de $(-1, 2)$ relativamente ao eixo dos xx e à recta $x = y$;

b) A reflexão de $(2, -5, 3)$ relativamente ao plano xy e ao plano yz;

c) A projecção ortogonal de $(2, -5)$ no eixo dos xx e dos yy;

d) A projecção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o plano xy e o plano xz;

e) A rotação de $(3, -4)$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$ e de $\pi/4$.

Problema 6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2).$$

Considere a base $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (-1, 0)$.

a) Calcule, em relação à base B no espaço de partida e de chegada, a matriz $A = M(T, B, B)$, que representa T relativamente a esta base.

b) Determine a matriz que representa T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$, $C = M(T, BC, BC)$, e relacione-a com a matriz A através da matriz mudança de base.

c) Represente o respectivo diagrama comutativo.

Problema 7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, 0).$$

Considere as bases $B_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $B_2 = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{v_1} = (1, 3)$, $\mathbf{v_2} = (-2, 4)$, $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u_2} = (2, 2, 0)$, e $\mathbf{u_3} = (3, 0, 0)$.

a) Calcule, em relação às base B_1 e B_2 no espaço de partida e de chegada, respectivamente, a matriz $A = M(T, B_1, B_2)$, que representa T relativamente a essas bases.

b) Determine a matriz que representa T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, $B = M(T, BC, BC)$, e relacione-a com a matriz A através das matrizes mudança de base.

c) Represente o respectivo diagrama comutativo.

Problema 8. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, a base canónica $BC = \{e_1, e_2, e_3\}$, e a base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$.

a) Determine a matriz F que realiza a mudança de base de BC para $\mathcal{B}$.

b) Dado um vector $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, isto é, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) na base BC, determine as suas coordenadas (y_1, y_2, y_3) na base $\mathcal{B}$.

c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja representação matricial na base canónica é

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

Problema 9. Sejam $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (-1, 4)$, e seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base $B = \{v_1, v_2\}$.

a) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ em relação à base B.

b) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) Encontre a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^2$.

d) Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$.

d) Use a fórmula obtida em d) para calcular $T(1, 1)$.

Problema 10. Sejam $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2, e $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por

$$T(1 + t^2) = 2t, \quad T(t^2) = 2t, \quad \text{e} \quad T(1 + t) = 1.$$

a) Determine a matriz A que representa T na base canónica de $\mathcal{P}_2$.

b) Determine a matriz B que representa T na base ordenada $\{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$. Indique a matriz de mudança de base, S, tal que $B = S^{-1}AS$.

Problema 11. Seja V o espaço linear real das matrizes reais 2×2, de entradas a_{ij}, satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{12} + a_{21} = 0$. Considere as seguintes matrizes de V:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.

(b) Dada a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(H) = J\ ,\ T(J) = -H\ ,$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base que contenha H e J.

Problema 12. a) Sejam $T : U \to V$ e $S : U \to V$ duas transformações lineares, e seja r um escalar. Mostre que $T + S$ e rT também são transformações lineares de U para V.

b) Sejam $T : U \to V$ e $S : V \to W$ duas transformações lineares. Mostre que $S \circ T : U \to W$ é uma transformação linear.

Problema 13. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que

a) O núcleo de T é um subespaço linear de U.

b) A imagem de T é um subespaço linear de V.

c) T é injectiva se e só se o núcleo de T é $\{0\}$.

Problema 14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3).$$

a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.

b) Indique um vector de $\mathbb{R}^3$ que não esteja na imagem da transformação.

c) Verifique o teorema da dimensão.

Problema 15. Diga, justificando, em que casos se tem $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$:

a) T_1 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx, e T_2 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos yy;

b) T_1 é a rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ num ângulo θ_1 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, e T_2 é a rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ num ângulo θ_2 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio;

c) T_1 é a expansão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num factor $c \in \mathbb{R}$, e T_2 é a rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num ângulo θ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio relativamente ao eixo dos zz.

Problema 16. Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T_2 \circ T_1$, e encontre o transformado $(T_2 \circ T_1)(x, y)$, nos seguintes casos:

a) $T_1(x, y) = (2x, 3y)$, $T_2(x, y) = (x - y, x + y)$;

b) $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$, $T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$.

Problema 17. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $T_1(x, y) = (x + y, x - y)$ e $T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y)$.

a) Mostre que T_1 e T_2 são invertíveis.

b) Determine $T_1^{-1}(x, y)$, $T_2^{-1}(x, y)$ e $(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y)$.

c) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.