**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral I

Testes/Exame - 4 de Fevereiro de 2012 - 8h00m
Cursos: LEMat , LEAN , MEBiol , MEQ , MEAmbi

**Apresente todos os cálculos que efectuar.**
**Não é necessário simplificar os resultados.**

**Problema 1** (1.5 val.) Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} b\,\mathrm{sen}(x) + a & x \le \pi \\ 2\cos x + 3x & x > \pi \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes.

(a) Calcule $a$ de modo a $f$ ser contínua em $x = \pi$;
(b) Calcule a constante $b$ sabendo que $f$ é diferenciável em $x = \pi$.

**Problema 2** (1.5 val.) Calcule os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{sen}^3(x-2)}{(x-2)^3} \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to 1} \mathrm{sen}(\pi x)\cos(\pi/x)$$

**Problema 3** (1.5 val.) Considere a função

$$f(x) = x^3/3 + x^2 - 3x$$

(a) Determine os intervalos de monotonia de $f$;
(b) Estude a concavidade de $f$;
(c) Esboce o gráfico de $f$.

**Problema 4** (1.5 val.) Calcule as seguintes derivadas:

$$(a)\ \mathrm{sen}^7(\ln x) \qquad\qquad (b)\ x^{e^x} \qquad\qquad (c)\ \arctan(x)\cdot\tan(x)$$

**Problema 5** (1.5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável cuja derivada é $f'(x) = \mathrm{sen}(x^2)$.

(a) Calcule a derivada de $x\, f(\cos x)$;
(b) Justifique que $f$ é injectiva no intervalo $[\,0, \sqrt{\pi}\,]$ e calcule a derivada da função inversa no ponto $y = f(\sqrt{\pi/4})$.

**Problema 6** (1.5 val.) Seja $(x_n)$ a sucessão definida por

$$x_1 = 2\ , \quad x_{n+1} = n\, x_n^2 \quad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Prove que $x_n \ge 2^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

**Problema 7** (1 val.) Dê um exemplo duma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ existem $y > x$ e $z > x$ com $f(z) < f(x) < f(y)$ (não chega esboçar o gráfico).

**Problema 8** (1.5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ \sqrt{x}\ln x \qquad (b)\ x^5\operatorname{sen}(x^6) \qquad (c)\ \frac{3}{x^2-3x}$$

**Problema 9** (1.5 val.) Seja

$$F(x) = \int_x^1 e^t \ln(t-3)\,dt$$

(a) Calcule o domínio de $F$.
(b) Calcule a derivada de $F$.

**Problema 10** (3 val.) Determine os seguintes limites. Apresente os cálculos que efectuar.

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n}{n!+2^n} \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{e^x-1}$$

**Problema 11** (1.5 val.) Diga justificando quais das seguintes séries são divergentes:

$$(a)\ \sum\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} \qquad (b)\ \sum e^{-k} \qquad (c)\ \sum(k^2+1)$$

**Problema 12** (1.5 val.) Calcule justificando

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\ .$$

Sugestão: Interprete o somatório como uma soma de Riemann associada a uma partição de $[\,0,1\,]$ em $n$ intervalos iguais.

**Problema 13** (1.5 val.) Sabendo que a série de potências $\sum c_k(x-1)^k$ converge simplesmente para $x=3$, qual é o raio de convergência da série?

**Problema 14** (1 val.) Prove o critério da comparação para integrais impróprios: dadas funções contínuas $f,g : [\,1,+\infty[$ tais que $0 \le f(x) \le g(x)$ para qualquer $x \ge 1$, se o integral $\int_1^{+\infty} g$ convergir, o integral $\int_1^{+\infty} f$ também converge e

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_1^{+\infty} g(x)\,dx\ .$$