

## Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 13 de Abril de 2013 - 9h00m

Curso: LEIC-A

**Problema 1** (2 val.) Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$$

- (a) Mostre que  $A \cap B = [\sqrt{2}, 3[$ .  
(b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de  $A \cap B$  e de  $A \cap B \cap \mathbb{Q}$ .

**Problema 2** (3 val.) Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(\ln x)(\cos x - 1) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^5 - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}} + \ln x}{(x + \cos x) \arctan x}$$

**Problema 3** (2 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a) \sin(\sin x) \quad (b) x^{\ln x}$$

**Problema 4** (4 val.) Considere a função  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ .

- (a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
(b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  em  $x = 0$ .  
(c) Determine os intervalos de monotonia de  $f$ .  
(d) Estude a concavidade e esboce o gráfico de  $f$ .

**Problema 5** (3 val.) Considere a função  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1}$ .

- (a) Calcule os limites laterais de  $f$  em  $x = 1$  e em  $x = -1$ .  
(b) Determine as assíntotas de  $f$ .  
(c) Esboce o gráfico de  $f$ , notando que  $f(2) = 2$  (não precisa de estudar a monotonia e a concavidade).

**Problema 6** (2 val.) Sejam  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis em todos os pontos. Alguns valores destas funções e das suas derivadas são dadas na tabela seguinte:

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	5	2
2	4	1	3	7

- (a) Calcule a derivada de  $f \circ g$  no ponto  $x = 1$ .  
(b) Assumindo que  $g$  é injectiva com função inversa  $h$ , calcule  $h'(1)$ .

**Problema 7** (2 val.) Considere as funções  $f, g$  definidas por  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \arccos x$ .

- (a) Esboce, na mesma figura, os gráficos de  $f$  e de  $g$ .  
(b) Mostre que a equação  $f(x) = g(x)$  tem pelo menos um zero.

**Problema 8** (2 val.) Seja  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua num ponto  $a \in D_f$ . Mostre que, para qualquer sucessão  $(x_n)$  de termos em  $D_f$ , se  $x_n \rightarrow a$  então  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

**Problema 9** (2 val.) Considere a função  $f(x) = 2x^2 + \operatorname{sen} x$ .

- (a) Determine o polinômio de Taylor,  $p(x)$ , de ordem 3 de  $f$  no ponto  $x = \pi/2$ .
- (b) Mostre que  $|f(x) - p(x)| \leq (x - \frac{1}{2}\pi)^4/24$ .

**Problema 10** (2 val.) Calcule a derivada das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \int_{x^2}^{-1} \cos(t^3) dt \qquad (b) g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$$

**Problema 11** (3 val.) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções (sugestão para (b):  $x = u^2$ ):

$$(a) \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \qquad (b) \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \qquad (c) \cos(x+1)e^x$$

**Problema 12** (2 val.) Calcule os seguintes integrais:

$$(a) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2x) dx \qquad (b) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

**Problema 13** (2 val.) Considere a região  $R$  no primeiro quadrante limitada pelas rectas  $y = 2x - 2$  e  $y = \frac{1}{2}x + 1$

- (a) Esboce a região  $R$ .
- (b) Calcule a área de  $R$ .

**Problema 14** (3 val.) Determine a natureza das seguintes séries e calcule a soma duma delas:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n) \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n}}$$

**Problema 15** (2 val.) Escreva as seguintes funções como séries de potências de  $x$ :

$$(a) f(x) = \ln(x+4) \qquad (b) g(x) = x e^{x^2}$$

**Problema 16** (2 val.) Considere a série de potências  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{\sqrt{k} 2^k}$ .

- (a) Determine o raio de convergência da série.
- (b) Determine em que pontos a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

**Problema 17** (2 val.) Mostre que a função  $\operatorname{sen} x$  é analítica em qualquer ponto  $a \in \mathbb{R}$ .