Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 12 de Novembro de 2015 - 12h00m

Cursos: MEAmbi, MEBiol

(3,0 val.) **Problema 1** Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 4| \le 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \arctan(2x+7) \ge \pi/4\}, \quad C = A \cap B.$$

(a) Escreva A e B como intervalos ou união de intervalos e mostre que $C = \{-3\} \cup [3,5]$.
(b) Determine, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo, mínimo, os pontos interiores e os pontos de acumulação de C e de $C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(3,0 val.) **Problema 2** Dado $a \in]0,2[$, seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1$, para $n \in \mathbb{N}$

(a) Mostre, usando o método de indução matemática, que $u_n \in]0,2[$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (u_n) é uma sucessão monótona.
(c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule o seu limite.

(5,0 val.) **Problema 3** Calcule, caso exista em $\widetilde{\mathbb{R}}$, ou justifique que não existe, cada um dos seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + \operatorname{sen}^5(4^x)}{3^x + x^5}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} \operatorname{sen}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(1 - 2x^3\right)^{4/x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x\cos(x)+3}$

(7,0 val.) **Problema 4** Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi + 3\arctan(\ln x), & \text{se } x > 0, \\ 3x + (\pi/2), & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
(b) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ e calcule, se existirem, as derivadas laterais de f na origem. Será f diferenciável em $x = 0$?.
(d) Estude a monotonia e a concavidade de f e esboce o seu gráfico, tendo em conta os resultados das alíneas anteriores.
(e) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e injectiva, tal que $g(0) = 1$ e $g'(0) = 4$. Justifique que a função $h = f \circ g$ é injectiva, h^{-1} é diferenciável em $h(0) = 2\pi$ e calcule $(h^{-1})'(2\pi)$.

(2,0 val.) **Problema 5** Seja $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e majorada e seja $G(x)$ o supremo da restrição de f ao intervalo $[x,+\infty[$:

$$G(x) = \sup\{f(t) : t \ge x\}$$

Mostre que se $G(x)$ não é uma função constante, então f tem máximo absoluto em I.
(Sugestão: comece por observar que existe um $a > 0$ tal que $G(a) < G(0)$)

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 12 de Novembro de 2016 - 12h00m

Cursos: MEAmbi, MEBiol

Instruções

- Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique as suas respostas.
- Numere as páginas do caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões são resolvidas.
- Identifique com o nome e número a primeira página do seu caderno de respostas e junte esta folha.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras ou telemóveis.

pergunta	página(s)	classificação	cotação
1.			3,0 val.
2.			3,0 val.
3.			5,0 val.
4.			7,0 val.
5.			2,0 val.
total			

Nome: ____

Número: ____________________

Boa Sorte!