Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste - 9 de Janeiro de 2017 - 18h30m
Cursos: MEAmbi, MEBiol

Apresente todos os cálculos que efectuar.

(3,0 val.) **Problema 1** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$ (b) $\dfrac{3}{\sqrt{x+5}}\arctan\sqrt{x+5}$

(3,0 val.) **Problema 2** Use a substituição $t = \operatorname{sen} x$ para mostrar que

$$\int_0^{\pi/6} \frac{4\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{4t}{(1-t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$$

e aproveite para calcular o integral.

(2,0 val.) **Problema 3** Calcule a área da região R do plano definida por

$$R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \leqslant x^2,\ y \leqslant 1,\ y \geqslant x^2-3\right\}$$

(3,0 val.) **Problema 4** Determine se as seguintes séries de termos positivos são convergentes e calcule a soma duma delas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n^2-n-1}}{\sqrt[3]{n^7+n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(3^{-n}+\frac{2^n}{n!}\right)$

(4,0 val.) **Problema 5** Considere a função definida pela série de potências: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}n}$

(a) Determine em que pontos a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.
(b) Determine o polinómio de Taylor p de f de ordem 53 no ponto $a=3$ e justifique que $f-p$ tem um mínimo local nesse ponto.
(c) Mostre que $f'(x) = 1/(10-2x)$ no interior do domínio de convergência.

(3,0 val.) **Problema 6** Seja $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja f a função definida por:

$$f(x) = \int_2^x \frac{x+3}{t+3} h(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Determine o domínio de f.
(b) Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.
(c) Sabendo que $h(x)\leqslant 1$ e $h'(x)\leqslant 1$ para todo o $x\in[2,3]$, mostre que:

$$f(x) - h(2)(x-2) \leqslant (x-2)^2 \quad \text{para todo o } x\in[2,3].$$

Sugestão: use o polinómio de Taylor de ordem 1 de f e a fórmula de Lagrange.

(2,0 val.) **Problema 7** Seja (a_n) uma sucessão e, para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $b_n = a_{2n-1}+a_{2n}$.

(a) Mostre que, se a série $\sum a_n$ é convergente, então $\sum b_n$ é também convergente, com a mesma soma.
(b) Mostre que o recíproco é verdadeiro se $a_n \geqslant 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$.
(c) Será o recíproco verdadeiro para todas as sucessões (a_n)? Justifique.