Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

2° Teste - 7 de Janeiro de 2019 - 9h00m

Curso: MEAer

(2,0 val.) **1.** Determine uma primitiva da seguinte função: $\dfrac{2x}{(x^2+9)(x-1)}$

(2,0 val.) **2.** Calcule o integral seguinte (pode ser útil a substituição $t = x^4 - 1$):

$$\int_0^1 x^3 \left(x^4-1\right)^3 \ln\left(x^4-1\right)\, \mathrm{d}x.$$

(2,0 val.) **3.** Determine a área da região $R \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas linhas

$$y = x + 5 \quad \text{e} \quad y = 2(3 - x^2)$$

(4,0 val.) **4.** Sejam $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por:

$$\phi(x) = 1 - \int_x^2 (t-x)\big(\operatorname{sen}(\pi t^2) + 2\big)\, \mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad F(x) = \int_x^2 \big(\operatorname{sen}(\pi t^2)+2\big)\, \mathrm{d}t\,.$$

(a) Calcule $\phi(0)$.
(b) Justifique que ϕ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e mostre que $\phi'(x) = F(x)$.
(c) Estude a concavidade da função ϕ.

(4,0 val.) **5.** Determine se as séries seguintes são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+1)(2+n)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n}}{(n+2)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$

(4,0 val.) **6.** Considere a função f definida pela série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, 2^{2(n+1)}}\, (x-1)^n$$

(a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.
(b) Determine $f^{(n)}(1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
(c) Escreva a derivada f' como um quociente de polinómios nos pontos onde a série converge absolutamente.

(2,0 val.) **7.** Seja $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente.

(a) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\int_1^n h(x)\, dx > h(1) + ... + h(n-1)$.
(b) Fazendo $h(x) = \ln x$, verifique que esta desigualdade se pode escrever, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $n^n/\mathrm{e}^{n-1} > (n-1)!$ e use esta relação para analisar a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, \mathrm{e}^n}$$